Actes de la XIX Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament. Barcelona, SCHCT-IEC
Ferragud, C.; Massa-Esteve, M. R. (ed.) (2023) p. 73-82
DOI: 10.2436/10.2006.05.10

LAS PILAS DE BALAS, NARANJAS O ESFERAS

JUAN NAVARRO LOIDI
CÁTEDRA SÁNCHEZ MAZAS, UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO - EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA (UPV-EHU)

Palabras clave: *aritmética, suma de sucesiones, números poligonales, suma de potencias de números naturales, método de inducción.*

Stacks of cannonballs, oranges or spheres

Summary: *This paper presents some applications which are offered by the problem of determining the number of spherical objects in a stack, for the purpose of introducing arithmetical concepts. This problem was important in past times since cannonballs were spherical and determining the number of them in stacks provided a knowledge of an army's available resources. Now it can be used to introduce different concepts, such as the sum of a succession, polygonal numbers, the sum of powers of natural numbers, or mathematical induction. Additionally, its relationship with a present-day problem, the Kepler conjecture, is discussed.*

Key words: *arithmetic, sum of a sequence, polygonal numbers, sum of powers of natural numbers, mathematical induction.*

Las pilas de balas y los artilleros

Hasta mediados del siglo XIX las balas de los cañones tenían forma esférica y se apilaban en pirámides de base triangular, cuadrada o rectangular (fig. 1). Un problema muy corriente para los artilleros era conocer cuántas balas tenían apiladas.

Esta cuestión se planteó en esos siglos en varios tratados de artillería. Por ejemplo, Tomás Vicente Tosca en el tratado de artillería de su *Compendio mathematico* tiene un apéndice titulado «Dado el lado de un montón ordenado de balas halla la suma de todas» (Tosca, 1712: 606-609). Pedro de Lucuce en el curso que escribió para la Academia de Matemáticas Militares dedicaba un apartado al «Formulario general para saber las balas que contiene toda especie de pilas» (Lucuce, 1761: f. 185*v*.-186*r*.).

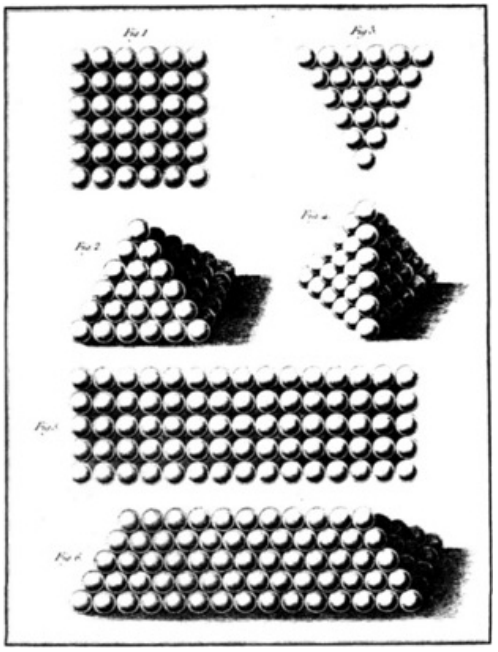

Figura 1. Pilas de balas de cañón.
Fuente: Morla (1803), «Artículo VII, lámina 2ª».

Tomás Cerdá en sus *Lecciones de artillería* incluye un «Apéndice. Reglas para contar las balas o bombas en los almacenes de artillería» (Cerdá, 1764: 160-172). Tomás Morla en el tratado que preparó para el Colegio de Artillería lo introduce en el apartado «Reflexiones que deben observarse para el buen orden, limpieza y conservación de los géneros y municiones» (Morla, 1785: 34-36). En el siglo siguiente, José Odriozola también estudia las pilas de balas en su *Compendio de artillería* (Odriozola, 1827: 227-228) e incluso a mediados del siglo XIX Manuel Fernández de los Senderos estudia la cuestión en sus *Elementos de artillería* (Fernández de los Senderos, 1852: 440-442).

En los libros de artillería no se profundiza mucho en justificaciones, se insiste más en la forma de hallar el número de balas con las reglas dadas. Un resumen claro y sencillo de dichas reglas se encuentra en el folleto (fig. 2) que publicó el sargento Pedro Ortiz, guardalmacén de la Academia de Artillería que existió en Cádiz alrededor de 1755.

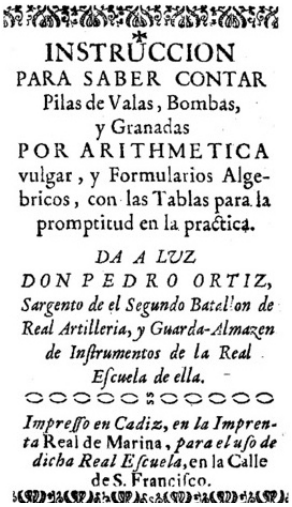
INSTRUCCION
PARA SABER CONTAR
Pilas de Valas, Bombas,
y Granadas
POR ARITHMETICA
vulgar, y Formularios Algebricos, con las Tablas para la promptitud en la practica.
DA A LUZ
DON PEDRO ORTIZ,
Sargento de el Segundo Batallon de Real Artilleria, y Guarda-Almazen de Inſtrumentos de la Real Eſcuela de ella.
Impreſſo en Cadiz, en la Imprenta Real de Marina, *para el uſo de dicha Real Eſcuela*, en la Calle de S. Franciſco.

Figura 2. Instrucción para saber contar pilas de balas.
Fuente: Portada Ortiz (s. f.).

Los métodos propuestos en su folleto son tres:

1. Aplicar unas reglas en las que se indica la secuencia de operaciones que hay que realizar para obtener el total de balas para un número concreto de balas de lado en la base. Acaba diciendo que las operaciones a realizar serían las mismas si fuera otro el lado.

2. Aplicar unas fórmulas algebraicas, diferentes según el tipo de apilamiento (fig. 3). Este procedimiento le parece más ventajoso porque se obtienen los «valores con menos sujeción a la memoria, que en la Arithmetica vulgar» (Ortiz, s. f.: 15). Las fórmulas son las siguientes:

Para la pirámide triangular: $\frac{a^3 + 3a^2 + 2a}{6}$

Para la pirámide cuadrada: $\frac{2a^3 + 3a^2 + a}{6}$

16

Para la cara triangular de qualquiera Pila es el formulario, que le corresponde: $\frac{a^2+a}{2}$ llamando â el lado de la Baſe.

Para la Pyramide triangular $\frac{a^3+3a^2+2a}{6}$

Para la Pyramide quadrada $\frac{2a^3+3a^2+a}{6}$

FIGURA 3. Fórmulas algebraicas para contar balas.
FUENTE: Ortiz (s. f.: 16).

3. Usar unas tablas en las que, conocido el tipo de pirámide y el número de balas en los lados de la base, se tiene el número total de balas en la pirámide (fig. 4).

Aunque Ortiz valore más el método algebraico, este último de las tablas es el primero que presenta y al que más espacio dedica. Probablemente eso se deba a que los conocimientos matemáticos no eran muy amplios entre los artilleros.

A de Pilas Triangulares. 21

Contenido de las Pilas.	Lados de las Baſes.	Contenido de las Pilas.
4	26	3276
10	27	3654
20	28	4060
35	29	4495
56	30	4960
84	31	5456
120	32	5984
165	33	6545
220	34	7140
286	35	7770
364	36	8436
455	37	9139
560	38	9880
680	89	10660
816	40	11480
967	41	12341
1140	42	13244
1330	43	14190
1540	44	15180
1771	45	16215
2024	46	17296
2300		
2600		
2925		

22. Tabla de Pilas Quadrangulares

Ls. de Baſ	Con te. de Pilas	Ls. de Baſ	Cont. de las Pilas.	Ls. de Baſ	Cont. de las Pilas.
2	5	21	3311	41	23821
3	14	22	3795	42	25585
4	30	23	4324	43	27434
5	55	24	4900	44	29370
6	91	25	5525	45	31395
7	140	26	6201	46	33511
8	204	27	6930	47	35720
9	285	28	7714	48	38024
10	385	29	8555	49	40425
11	506	30	9455	50	42925
12	650	31	10416	51	45526
13	819	32	11440	52	48230
14	1015	33	12529	53	51039
15	1240	34	13685	54	53955
16	1496	35	14910	55	56980
17	1785	36	16206	56	60116
18	2109	37	17575	57	63365
19	2470	38	19019	58	66729
20	2870	39	20541	59	70210
		40	22140	60	73810

Tabla de Pilas Rectangulares. 23

EXCESO 6. Lados de las Baſes.	Cont. de Pls.	EXCESO 6. Lados de las Baſes.	Cont de Ps.
3. y 4	20	3. y 24	140
3. 5	26	3. 25	146
3. 6	32	3. 26	152
3. 7	38	3. 27	158
3. 8	44	3. 28	164
3. 9	50	3. 29	170
3. 10	56	3. 30	176
3. 11	62	3. 31	182
3. 12	68	3. 32	188
3. 13	74	3. 33	194
3. 14	80	3. 34	200
3. 15	86	3. 35	206
3. 16	92	3. 36	212
3. 17	98	3. 37	218
3. 18	104	3. 38	224
3. 19	110	3. 39	230
3. 20	116	3. 40	236
3. 21	122	3. 41	242
3. 22	128	3. 42	248
3. 23	134	3. 43	254

FIGURA 4. Tablas con las balas de diversas pilas.
FUENTE: Ortiz (s. f.: 21-23).

Las justificaciones matemáticas

Las justificaciones de esas reglas estaban en los libros de matemáticas que estudiaban los oficiales de artillería. De los autores de los libros mencionados anteriormente, Cerdá en el tomo segundo de *Liciones de matematica*, dentro del «Articulo VI. Modo de sumar algunas series» en el «Problema II. Suma de cuadrados», dice al final que «esta formula de la suma de los quadrados de los numeros naturales se puede aplicar a las pilas quadradas de balas» (Cerdá, 1758: 214). Más adelante estudia la suma de expresiones de la forma: $(m + e)(p + e) + (m + 2e)(p + 2e) + (m + 3e)(p + 3e) + \ldots$ y al final dice «esta fórmula es de mucha importancia y grande utilidad en los almacenes de artillería» (Cerdá, 1758: 221). La teoría para las pilas de base triangular está en el «Capítulo XVII. De los números figurados» (Cerdá, 1758: 224). Para Cerdá, los números figurados son los que se obtienen a partir de la sucesión 1, 1, 1, 1… sumándole a un término los anteriores (de segundo orden serían 1, 2, 3, 4…, de tercero 1, 3, 6, 10…, de cuarto 1, 4, 10, 20…). Los de cuarto orden coinciden con el número de balas en una pirámide triangular, pero esta vez no lo dice.

En el Colegio de Artillería de Segovia, era profesor de matemáticas Pedro Giannini, que publicó un *Curso matemático* en el que en el apartado «Del uso del cálculo para resolver los problemas aritméticos» (Giannini, 1782: 544) plantea el problema de los «números figurados», advirtiendo al final que «el problema antecedente puede aplicarse para hallar las balas de una pila triangular» (Giannini, 1782: 603). En otro problema plantea hallar las sumas de las sucesiones de término general n, n^2, n^3, n^4… y al final dice que con los resultados obtenidos se puede «determinar el número de balas que hay en una pila cuadrada» (Giannini, 1782: 605).

En el siglo XIX, Odriozola en el tomo III de su *Curso completo de matemáticas* en el «Capítulo II. Series» tiene una lección titulada «Aplicaciones de la teoría desenvuelta en la lección precedente al cálculo de las pilas de proyectiles» (Odriozola, 1829: 126-135) en la que se aplica lo estudiado sobre sucesiones y series para obtener el número de balas en una pila.

En estos libros de matemáticas de los siglos XVIII y XIX primero se estudia la teoría general y después se introduce el problema de conocer el número de balas en una pila como una aplicación útil. Ahora, en clase, interesaría más considerarlo como un caso práctico que pueda llevar a los alumnos a entender mejor las sucesiones y las series.

Aplicación del problema a la enseñanza de aritmética

Aunque históricamente esta cuestión estuviera relacionada con la artillería, ya no lo está. Para hacer menor la resistencia del aire en la segunda mitad del siglo XIX se generalizó la forma ojival para las balas y actualmente ya no son esféricas. Pero el estudio de las pilas de objetos esféricos sigue siendo actual. Se puede plantear en muchas situaciones, por ejemplo, cuando se quiera conocer el número de elementos que hay en una pila de balones, o en una frutería para saber las naranjas que están apiladas. Estas cuestiones son realidades próximas que pueden servir para introducir una serie de puntos interesantes de aritmética. A continuación, se comentan algunos.

Elementos en una capa

Para saber cuántos elementos hay en una pirámide, un primer paso es saber cuántos hay en cada capa, y eso depende de la forma de la pirámide, y del número de elementos que tenga de lado dicha capa.

Si la pirámide es triangular y la capa tiene n elementos de lado, el número es $\frac{n(n+1)}{2}$.

Para las cuadradas con n de lado es n^2.

Para las rectangulares de lados n y m es $n \cdot m$.

Números poligonales

Se podrían generalizar los números ligados a un polígono a polígonos con más lados y definir números para los pentágonos, hexágonos… Esta cuestión se planteó ya en la Antigüedad, y lleva a la introducción de los números pentagonales, hexagonales o en general poligonales (fig. 5).

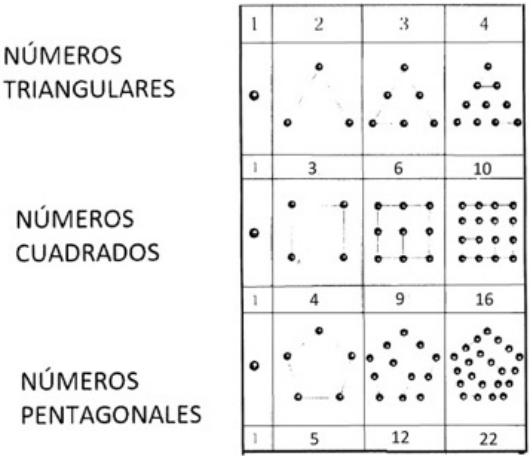

FIGURA 5. Números poligonales.
FUENTE: Elaboración propia.

Los números poligonales se obtienen contando cuántos puntos se necesitan para obtener la figura deseada. Si se parte de la unidad para obtener un triángulo, hay que añadir 2 puntos; para un cuadrado, 3; para un pentágono, 4, etc. Si se quiere una figura mayor al triángulo, hay que añadir una nueva línea con 3 puntos; al cuadrado, dos líneas, una de 3 y otra de 2; al pentágono, tres con 3, 2 y 2 puntos, etc. De seguir, al triángulo se le añaden 4 puntos; al cuadrado, 4 y 3, y al pentágono, 4, 3 y 3, etc.

Para los números triangulares, el número de puntos que se va añadiendo son 1, 2, 3, 4… Es decir, una progresión aritmética de término general $a_n = 1 + (n\text{-}1)\cdot 1$. Los números triangulares, que se obtienen sumándolos, serán:

1, 3, 6, 10… en general, si el lado es n, $\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Para los cuadrados los puntos que se van añadiendo son 1, 3, 5, 7… Es decir, una progresión aritmética de término general $a_n = 1 + (n\text{-}1)\cdot 2$ y los números cuadrados serán las sucesivas sumas

1, 4, 9, 16… y en general valdrán n^2.

Para los números pentagonales, se van añadiendo 1, 4, 7, 10… Una progresión aritmética de término general $a_n = 1 + (n\text{-}1)\cdot 3$ y los números pentagonales serían:

1, 5, 12, 22... y en general valdrían $\dfrac{3\cdot n^2}{2} - \dfrac{n}{2}$.

Pirámides de base triangular

Para obtener el número total de objetos en una pirámide triangular, se deben sumar los números triangulares correspondientes a cada una de sus capas.

Tabla 1. *Objetos en una pirámide de base triangular*

Objetos en el lado de la base	*Elementos por capas*	*Número de objetos*
1	1	1
2	1 + 3	4
3	1 + 3 + 6	10
4	1 + 3 + 6 + 10	20
5	1 + 3 + 6 + 10 + 15	35
6	1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21	56

Fuente: Elaboración propia.

La sucesión que se obtiene es tal que, hallando la sucesión de las diferencias de dos términos consecutivos, y de esta sucesión de diferencias hallando de nuevo la sucesión de diferencias, y así sucesivamente, la tercera sucesión es constante.

Sucesión 1, 4, 10, 20, 35, 56…

Primera diferencia 3, 6, 10, 15, 21…

Segunda diferencia 3, 4, 5, 6…

Tercera diferencia 1, 1, 1…

Cuando la tercera diferencia es constante, el término general de la sucesión es un polinomio de tercer grado: $S_n = An^3 + Bn^2 + Cn$. Sustituyendo n por 1, 2, y 3 e igualando con los valores conocidos de los tres primeros términos, se obtiene A = 1/3, B = 1/2 y C = 1/3, lo que se suele poner:

$$S_n = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{6}$$

Estos resultados se pueden ver también como líneas en el triángulo de Tartaglia (fig. 6).

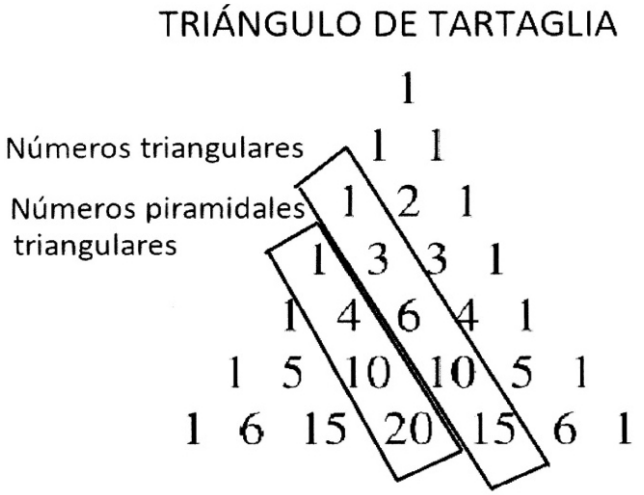

Figura 6. Números triangulares y piramidales y el triángulo de Tartaglia.
Fuente: Elaboración propia.

Pirámides de base cuadrada

Los elementos en cada capa de una pirámide cuadrada son los cuadrados del número de objetos de su lado, luego los elementos en las pilas serán la suma de los cuadrados de los números naturales menores o iguales al lado de la base.

TABLA 2. *Objetos en una pirámide de base cuadrada*

Elementos de lado	*Elementos por capas*	*Número de objetos*
1	1	1
2	1 + 4	5
3	1 + 4 + 9	14
4	1 + 4 + 9 + 16	30
5	1 + 4 + 9 + 16 + 25	55
6	1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36	91

FUENTE: Elaboración propia.

Se tiene que en la sucesión de sumas la tercera diferencia es constante:

Sucesión 1, 5, 14, 30, 55, 91…

Primera diferencia 4, 9, 16, 25, 36…

Segunda diferencia 5, 7, 9, 11…

Tercera diferencia 2, 2, 2…

Por lo tanto, el término general debe ser un polinomio de tercer grado en n y, calculando como antes, se obtiene para el número de esferas en una pirámide cuadrada de lado de la base n:

$$S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

Suma de potencias de números naturales

Conocida la suma de cuadrados de los números naturales, se puede uno preguntar la suma de los cubos, de las cuartas potencias, etc.

Se ha hallado:

$$1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0 + \ldots + n^0 = n$$

$$1^1 + 2^1 + 3^1 + 4^1 + \ldots + n^1 = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\cdot(2n+1)\cdot(n+1)}{6}$$

Para conocer la suma de los cubos:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots + n^3$$

Por el método anterior, los primeros sumandos serían 1, 8, 27, 64, 125, 216… y las sumas parciales 1, 9, 36, 100, 225, 441… Las diferencias:

Primeras: 8, 27, 64, 125, 216…

Segundas: 19, 37, 61, 91…

Terceras: 18, 24, 30…

Cuartas: 6, 6, 6…

Por lo tanto, el término general de la sucesión suma de cubos será de la forma $An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn$. Sustituyendo n = 1, 2, 3 y 4 e igualando con los valores conocidos de esas sumas se obtiene que la fórmula de la suma es:

$$S = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$$

Si se sigue con potencias superiores, se observa que por cada grado de más se necesita hacer una vez más la diferencia para obtener una constante y el polinomio que da la suma sube un grado, por lo que hay un coeficiente más a hallar y aumenta la complejidad del sistema de ecuaciones a resolver.

Pirámides rectangulares

Sea una pirámide rectangular con m bolas en el lado más corto y n en el más largo, las bolas que contienen las capas son:

En la primera capa	$m\cdot n$	=	$m\cdot n$
Segunda	$(m-1)\cdot(n-1)$	=	$m\cdot n-(m+n)+1$
Tercera	$(m-2)\cdot(n-2)$	=	$m\cdot n-2(m+n)+4$
…			
Última	$(m-m+1)\cdot(n-m+1)$	=	$m\cdot n-(m-1)\cdot(m+n)+(m-1)^2$

La primera columna del segundo término de las igualdades son los m términos de una progresión aritmética de primer término $m\cdot n$ y diferencia $-(m+n)$, la segunda columna son los cuadrados de los números de 1 a $m-1$. Sus sumas son conocidas y la suma total será:

$$S=\frac{mn+(mn-(m-1)\cdot(m+n))}{2}\cdot m+\frac{(m-1)\cdot(2m-1)\cdot m}{6}=\frac{3m\cdot n-m^2+3n+1}{6}\cdot m=$$

$$=\frac{3\cdot n-m+1}{6}\cdot m\cdot(m+1)$$

Método de inducción

Para obtener las fórmulas de la suma en las pirámides de base triangular o cuadrada, se ha dicho que, si al hacer las diferencias sucesivas de los términos de una sucesión, la diferencia enésima es una cantidad constante, la fórmula del término general de dicha sucesión es un polinomio de grado n. La demostración directa de esa propiedad es algo larga; pero una vez hallada la fórmula que da el número de objetos en una pirámide triangular o cuadrada se puede demostrar que es correcta utilizando el método de inducción matemática. Por ejemplo, para las pirámides cuadradas, la fórmula a demostrar es:

$$S=\frac{m\cdot(2m+1)\,(m+1)}{6}$$

Si el lado es $m=1$, vale $S=\dfrac{1\cdot(2\cdot1+1)\,(1+1)}{6}=1$.

Si el lado es $m=2$, vale $S=\dfrac{2\cdot(2\cdot2+1)\,(2+1)}{6}=5$ correctos.

Supuesto que la fórmula es válida para m lo es para $m+1$. En efecto, si la base tiene de lado $m+1$, los objetos que tenga serán los de una pirámide de base m más una nueva capa con $(m+1)^2$ elementos. Si la fórmula fuera válida para m, el total para $m+1$ sería:

$$S=\frac{m\cdot(2m+1)\,(m+1)}{6}+(m+1)^2=(m+1)\cdot\frac{m\cdot(2m+1)+6\,(m+1)}{6}=(m+1)\cdot\frac{2m^2+7m+6}{6}=$$

$$=\frac{(m+1)\cdot(2m+3)\,(m+2)}{6}=\frac{(m+1)\,(2(m+1)+1)\,((m+1)+1)}{6}$$

El resultado es la fórmula propuesta para la posición $m+1$. Luego, si la fórmula es válida para m, lo es también para $m+1$ y, por lo tanto, es válida en general.

La conjetura de Kepler

Las pilas de balas también han sido el origen de la conjetura de Kepler, uno de los 23 problemas que planteó Hilbert en 1900 en el Congreso Internacional de Matemáticos como los problemas del futu-

ro. Esta conjetura afirma que, si apilamos esferas iguales, la densidad máxima se alcanza con un apilamiento piramidal de caras centradas.

Se dice que en el origen de la conjetura está un viaje que Walter Raleigh, corsario, escritor y político inglés, realizó a América a finales del siglo XVI. Queriendo llevar el mayor número posible de balas, preguntó a su asistente, el matemático Thomas Harriot, cómo había que ponerlas para que ocuparan el menor espacio posible. Harriot se lo preguntó al astrónomo Kepler, quien conjeturó en 1611 que el mejor modo es el apilamiento piramidal con caras centradas, al que recurrían los artilleros o los fruteros.

La conjetura está demostrada en la práctica por muchos siglos de experiencia. Pero una demostración matemática no se ha encontrado hasta 2005, cuando Thomas Hales publicó en *Annals of mathematics* (2005, vol. 162, núm. 3, p. 1063-1183) una demostración de la conjetura de Kepler que resultaba incompleta sin adjuntar los resultados obtenidos con una complicada trama de algoritmos informáticos. Es decir, como en el teorema de los cuatro colores, su demostración de la conjetura de Kepler depende de unos resultados que solo se pueden obtener con ordenadores (Córdoba, 2006).

Referencias bibliográficas

Cerdá, T. (1758). *Liciones de matemática […]*. Tomo II. Barcelona: Suria.

— (1764). *Lecciones de artillería*. Barcelona: Suria.

Córdoba Barba, A. (2006). «La demostración de la conjetura de Kepler. Un matemático logra desentrañar un problema planteado por el genio alemán hace cuatro siglos». *El País* [en línea] (4 enero). <https://elpais.com/diario/2006/01/04/futuro/> [Consulta: 20 febrero 2022].

Fernández de los Senderos, M. (1852). *Elementos de artillería […]*. Tomo II. Madrid: Aguado.

Giannini P. (1782). *Curso matemático […]*. Tomo II. Segovia: Espinosa.

Lucuce, P. (1761). *Tratado V*: *De la artillería* [en línea]. Manuscrito con las notas de Antonio Remón Zarco del Valle, parte de su Curso Matemático. <https://bibliotecavirtual.defensa.gob.es/BVMDefensa/i18n/consulta/registro.cmd?id=4532> [Consulta: 20 febrero 2022].

Morla, T. (1785). *Tratado de artillería […]*. Tomo II. Segovia: Espinosa.

— (1803). *Laminas pertenecientes al tratado de artillería*. Madrid: Imprenta Real.

Odriozola J. (1827). *Compendio de artillería.* Madrid: Fuentenebro.

— (1829). *Curso completo de matemáticas puras*. Tomo III. Madrid: García.

Ortiz P. (s. f.). *Instrucciones para saber contar pilas de balas bombas, y granadas*. Cádiz: Imprenta Real de Marina.

Tosca, T. V. (1712). *Compendio mathematico […]*. Tomo V. Valencia: Cabrera.